Concours GE2I/GMEC session 2015

Composition : Mathématiques 3 (algèbre)

Durée : 4 Heures

Ce sujet comporte un exercice et un problème avec deux parties indépendantes

EXERCICE

Soit IK un sous-corps de IR et f un isomorphisme du corps IR sur le corps IK.

1-Montrer que, pour tout x de IR_+, $f(x) = [f(\sqrt{x})]^2$ .En déduire que f est croissante.

2-a) Montrer que, pour tout (n,x) de IN×IR, f(nx)=nf(x).

b) Montrer que pour tout rationnel x, f(x) = x.

3-Montrer que f est l'application identité de IR dans IR.
(on pourra utiliser la densité de Q dans IR. Attention :f n'est pas dite continue).

Problème

Partie 1

On munit l'espace IR^3 de son produit scalaire canonique et on l'oriente de telle sorte que sa base canonique (i, j, k) soit orthonormale directe.

Pour u = (a, b, c) de IR^3 on définit la matrice $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

et f_u l'endomorphisme de IR^3 de matrice M_u dans la base (i, j, k). On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices M_u , $u \in IR^3$ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des endomorphismes f_u , $u \in IR^3$.

A.

1-Montrer que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{V}$ sont des espaces vectoriels .Quelles sont leurs dimensions ?

2-Soit u = (a, b, c) et v = (x, y, z). Calculer M_uM_v et montrer que $M_uM_v \in \mathcal{M}$.

En déduire que $\mathcal{M}$ est une algèbre. Est-elle commutative ?

3-On note $w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$.

i) Montrer que w_1 est un vecteur propre commun à tous les f_u.

ii) Soit $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à w_1. On note $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$ et $w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$. Montrer que ($w_2$, w_3) est une base orthonormale de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}'$=(w_1, w_2, w_3) est une base orthonormale de IR^3. Donner la matrice de f_u dans cette base $\mathcal{B}'$.

iii) Montrer que $\mathcal{P}$ est stable pour chaque f_u.

4-Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_u soit diagonalisable dans IR.

B.

Soit $\Psi : u \longmapsto f_u(u)$ de IR^3 dans IR^3 et $P_m(X) = X^3 - X^2 + m$ où m désigne un paramètre réel.

1-i) Caractériser les éléments de $U = \Psi^{-1}(\{i\})$.
ii) En déduire que M_u est une matrice orthogonale si et seulement si $u \in U$.

2-Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que P_m admette trois racines réelles (éventuellement confondues).

3-Montrer que pour $u = (a, b, c) \in IR^3$, M_u est la matrice d'une rotation si et seulement si a, b et c sont les racines de P_m avec $m \in [0 ;\frac{4}{27}]$.

4-Etudier f_u pour $u = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Partie 2

A . On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $]-1; 1[$ dans IR de la forme $f(x) = \frac{p(x)}{1-x^3}$ où p désigne une fonction polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

1-Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

2-Pour k=0, 1, 2 on note h_k l'application définie sur $]-1; 1[$ par $h_k(x)=\frac{x^k}{1-x^3}$.
Montrer que $\mathcal{B}=(h_0, h_1, h_2)$ est une base de $\mathcal{F}$.

3-On note $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ qui admettent une limite finie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Montrer que $\mathcal{F}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$. Quelle est sa dimension ? Montrer que les éléments de $\mathcal{F}_1$ peuvent être prolongés par continuité en des fonctions C^∞ sur $[-1; 1]$.

4-Pour $x \in]-1; 1[$ on note $g_0(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{3}}$, $g_1(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)\sqrt{2}}$ et $g_2(x) = \frac{1+2x}{(1+x+x^2)\sqrt{6}}$.
Montrer que (g_1, g_2) est une base de $\mathcal{F}_1$, que $\mathcal{B}_1=(g_0, g_1, g_2)$ est une base de $\mathcal{F}$ et que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ est orthogonale.

B. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions développables en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

1-i) Montrer que h_0, h_1, h_2 sont des éléments de $\mathcal{S}$ et donner leur développement en série entière $\sum a_n x^n$.

ii) Comparer a_{n+3} et a_n.

iii) En déduire que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ dont le développement en série entière $\sum a_n x^n$ vérifie, pour tout n ∈ IN, $a_{n+3}=a_n$.

2- On définit sur $\mathcal{F}$ l'opération :

$$(f|g) = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + \frac{f''(0)g''(0)}{4}.$$

Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont des bases orthonormales de $\mathcal{F}$.

3- Pour f ∈ $\mathcal{F}$ on définit g_f sur $]-1;1[$ par $g_f(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si x≠0 et l'on définit $g_f(0)$ en prolongeant par continuité.

i) Montrer que $g_f \in \mathcal{F}$.

ii) On appelle φ l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ qui à f fait correspondre g_f. Montrer que φ est une rotation et préciser son axe et son angle.

iii) Soit f ∈ $\mathcal{F}_1$.Montrer que φ(f) ∈ $\mathcal{F}_1$. Déterminer les limites de $\varphi(g_1)(x)$ et $\varphi(g_2)(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

C. On considère l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $]-1;1[$ qui vérifient l'équation différentielle

$$(1-x^3)y''' - 9x^2y'' - 18xy' - 6y = 0 \qquad (1)$$

1- Chercher les solutions développables en série entière et montrer que ce sont des éléments de $\mathcal{F}$. Les a-t-on tous ?

2- On cherche les solutions définies sur IR. Pour ceci, si g est une solution de (1) sur un intervalle I inclus dans IR\{1}, déterminer l'équation différentielle d'ordre 3 vérifiée par f, où $f(x)=(1-x^3)g(x)$. Déterminer f et déduire les solutions de (1) sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$.
Etudier les prolongements des solutions en 1 et donner toutes les solutions définies sur IR.